

**КРИТЕРІЇ НАБЛИЖЕННЯ ІМПЕДАНСНИХ
НЕОДНОРІДНОСТЕЙ ДЕЛЬТА-НЕОДНОРІДНОСТЯМИ¹**

*Нелін Є. А., д.т.н., професор; Ляшок А. В., к.т.н.
Національний технічний університет України
«Київський політехнічний інститут», м. Київ, Україна,
alichka_lav@ukr.net*

**CRITERIA OF IMPEDANCE INHOMOGENEITIES
APPROACHING BY DELTA-INHOMOGENEITIES**

*Nelin E. A., Doctor of Engineering, Professor; Liashok A. V., PhD
National Technical University of Ukraine «Kyiv Polytechnic Institute», Kyiv, Ukraine,
alichka_lav@ukr.net*

Вступ

Для нашого хвильового світу хвильовий імпеданс, що характеризує реакцію середовища на хвильове збурювання, є фундаментальною та універсальною характеристикою. Концепція хвильового імпедансу знайшла застосування в різних областях фізики і техніки, хоча її потенціальні можливості значно більші. Ця концепція може бути застосована в незвичних для неї квантовій механіці [1, 2] і космології [3].

Мікро- та наноструктури у вигляді поодиноких хвильових неоднорідностей і ґрат неоднорідностей, таких як двобар'єрна і кристалоподібні структури — надґрати, фотонні, електромагнітні й фононні кристали, становлять основу пристроїв обробки сигналів нового покоління. Традиційно такі структури моделюють методом матриці переносу [4]. Підхід на основі хвильового імпедансу спрощує моделювання, наповнює його фізичним змістом, дозволяє отримати аналітичні рішення [5].

В різних науково-технічних областях при моделюванні широко використовують підхід на основі δ -функції, що, як і імпедансний підхід, суттєво спрощує моделювання.

В [6] для моделювання хвильових мікро- та наноструктур запропоновано модель імпедансних δ -неоднорідностей, яка поєднує переваги підходів на основі хвильового імпедансу і δ -функції. Відповідність характеристик структур і їх δ -моделей в [6] розглянуто на прикладах окремих структур, утворених неоднорідностями скінченних розмірів (скінченними неоднорідностями). Для узагальнення відповідності структур і їх δ -моделей необхідні кількісні критерії наближення скінченних неоднорідностей δ -неодно-

¹ <http://radap.kpi.ua/radiotechnique/article/view/1157>

рідностями (критерії δ -наближення).

Метою статті є встановлення критеріїв δ -наближення імпедансних неоднорідностей. Для спрощення перетворень імпеданси нормовано до імпедансу зовнішнього середовища.

Вхідний імпеданс імпедансних δ -неоднорідностей

Розглянемо такі середовища: середовище 1 — квантово-механічне, нормований хвильовий імпеданс визначається виразом

$$Z = \sqrt{\frac{(E - V)m'}{Em}}, \quad (1)$$

де E — енергія електрона; V — потенціальна енергія; m — ефективна маса електрона; штрих відповідає зовнішньому середовищу; середовище 2 — електромагнітне або акустичне з імпедансом

$$Z = \text{const}. \quad (2)$$

Імпедансні δ -неоднорідності в середовищах 1 і 2 позначимо нижніми індексами 1 і 2, а індекси параметрів бар'єра і ями — буквами b і w (barrier і well).

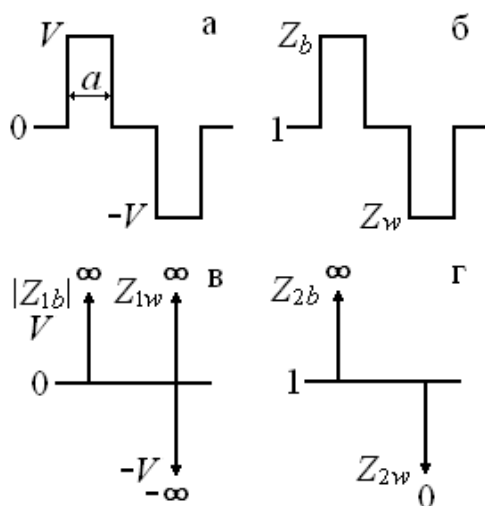


Рис. 1. Імпедансні неоднорідності: скінченної ширини a в середовищах 1 (а) і 2 (б); δ -неоднорідності в середовищах 1 (в) і 2 (г).

На рис. 1 показано імпедансні неоднорідності. Ефективність взаємодії хвилі з неоднорідністю характеризує константа α , яка дорівнює її «площі». У середовищі 1 $\alpha = |V|a$; у середовищі 2 для бар'єра $\alpha = Z_b a$, а для ями $\alpha = G_w a$, де $G_w = Z_w^{-1}$.

Ширина δ -неоднорідності $a \rightarrow 0$. Для δ_1 -неоднорідностей $|V| = \alpha / a \rightarrow \infty$. З урахуванням цього виходячи з (1) $Z_b = iZ_w$ і $Z_w = \sqrt{\alpha m' / \alpha m} \rightarrow \infty$. Виходячи з (2) для δ_2 -неоднорідностей $Z_b = \alpha / a \rightarrow \infty$ і $Z_w = a / \alpha \rightarrow 0$.

Вхідний імпеданс δ_1 -неоднорідностей і δ_2 -бар'єра і вхідний адмітанс δ_2 -ями ви-

значаються формулами [6]

$$Z_\delta = 1 + 2i\eta, \quad G_\delta = 1 + 2i\eta, \quad (3)$$

де $\eta_1 = \pm \alpha \sqrt{m' / 2E} / \hbar = \pm \alpha m' / \hbar^2 k'$, $\hbar = h / 2\pi$, h — постійна Планка (знак «+» з « \pm » відповідає δ_1 -бар'єру); $\eta_2 = -\alpha k / 2$, k — хвильове число.

Імпедансна δ -неоднорідність своєрідно трансформує імпеданс середовища, вносячи реактивну складову.

Рис. 2 ілюструє рівень значень і характер залежностей реактивної складової (по модулю) вхідного імпедансу і адмітансу δ -неоднорідностей згідно (3). Як бачимо, реактивна складова може перевищувати хвильовий імпеданс середовища. Залежності реактивних складових $2|\eta_1|$ і $2|\eta_2|$ від частоти мають протилежний характер: зі зростанням частоти (або енергії для δ_1 -неоднорідності) значення $2|\eta_1|$ зменшується, а значення $2|\eta_2|$ збільшу-

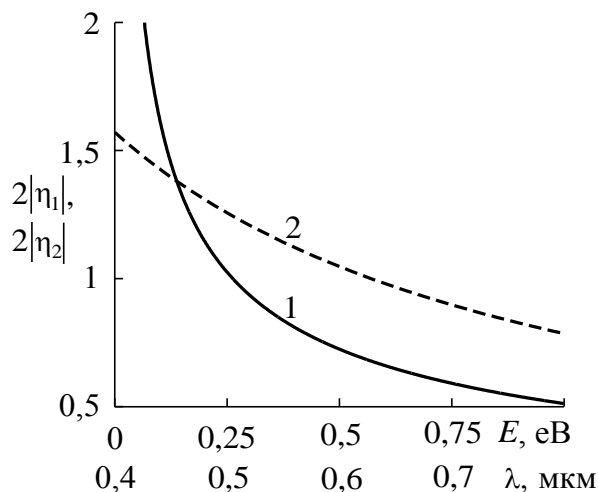


Рис. 2. Залежності реактивної складової вхідного імпедансу δ_1 -неоднорідності від енергії (1) та імпедансу δ_2 -бар'єра і адмітансу δ_2 -ямів від довжини хвилі λ (2). $\alpha_1=0,1$ еВ·нм, $m' = m_0$, де m_0 — маса електрона; $\alpha_2=0,1$ мкм.

ється.

Знак реактивної складової в (3) відповідає знаку «+» фази у фазовому множнику прямої хвилі $\exp(ikx)$, прийнятому в квантовій механіці. У реактивному середовищі (наприклад, в потенціальному бар'єрі при $E < V$) $k = i|k|$ і $\exp(ikx) = \exp(-|k|x)$ — амплітуда прямої хвилі експоненційно зменшується. Оскільки в теорії довгих ліній у фази прямої хвилі знак «-», при аналізі характеру реактивності реактивної складової її знак необхідно змінити на протилежний.

Критерії дельта-наближення скінченних неоднорідностей

Критерії δ -наближення мають встановлювати обмеження на параметри скінченних неоднорідностей, при яких похибка наближення їх характеристик співвідношеннями (3) не перевищує задану.

У рамках імпедансного підходу скінченній імпедансній неоднорідності відповідає відрізок лінії передачі з імпедансом Z і вхідним імпедансом

$$Z_i = \frac{1 - iZ \operatorname{tg} \varphi}{1 - iZ^{-1} \operatorname{tg} \varphi}, \quad (4)$$

де $\varphi = ka$. Для δ_1 -бар'єра при $E < V$ Z і k уявні і $\operatorname{tg} \varphi = i \operatorname{th} |\varphi|$.

При виконанні умов

$$\operatorname{tg} \varphi \approx \varphi \text{ і } \operatorname{th} |\varphi| \approx |\varphi| \quad (5)$$

з (4) для дійсних і уявних Z і k маємо відповідно

$$Z_i \approx \frac{1 + \varphi^2 - iZ_-}{1 + Z^{-2} \varphi^2}, \quad (6)$$

$$G_i \approx \frac{1 + \varphi^2 + iZ_-}{1 + Z^2\varphi^2}, \quad (7)$$

$$Z_i \approx \frac{1 - |\varphi|^2 + iZ_+}{1 + |Z^{-1}\varphi|^2}, \quad (8)$$

де $Z_- = (Z - Z^{-1})\varphi$; $Z_+ = (|Z| + |Z^{-1}|)|\varphi|$.

Прийmemo, що для неоднорідностей в середовищі 1 $m' = m$. При $E \geq \pm V$ (тут і далі верхній знак відповідає бар'єру, а нижній — ямі) в результаті перетворень отримаємо $Z_- = -2\eta_1$. Якщо $E < V$, для бар'єра маємо $Z_+ = 2\eta_1$. При виконанні (5) $\varphi^2 \ll 1$, $|\varphi|^2 \ll 1$, $Z^{-2}\varphi^2 \ll 1$ і $|Z^{-1}\varphi|^2 \ll 1$, тому з (6) і (8) отримаємо $Z_i \approx 1 + 2i\eta_1$, що наближено відповідає (3).

Враховуючи, що $Z^{-1}\varphi = |Z^{-1}\varphi| = \varphi'$, відносні похибки активної і реактивної складових виразів (6) і (8) дорівнюють $\delta_{\text{Re}} \approx \mp 2mVa^2 / \hbar^2$ і $\delta_{\text{Im}} = -(k'a)^2 = -2Em a^2 / \hbar^2$. При $E > V$ маємо $|\delta_{\text{Im}}| > |\delta_{\text{Re}}|$.

Обмежимо максимальну похибку значенням приблизно 30%. З цього обмеження отримаємо $k'a \lesssim \pi / 6$ і критерій δ -наближення:

$$a \lesssim \lambda' / 12. \quad (9)$$

Для неоднорідностей в середовищі 2 $Z_- \approx \mp 2\eta_2$ з похибкою, що зменшується зі зменшенням Z_w і збільшенням Z_b . Прийmemo, що значення $Z_w = 0,5$ і $Z_b = 2$, яким відповідає похибка 33,3%, граничні. Відповідний критерій δ -наближення прийме вигляд:

$$Z_w \leq 0,5, \quad Z_b \geq 2. \quad (10)$$

Оскільки при виконанні (5) і (10) $Z_b^{-2}\varphi^2 \ll 1$ і $Z_w^2\varphi^2 \ll 1$, з (6) і (7) отримаємо $Z_i \approx 1 + 2i\eta_{2b}$ і $G_i \approx 1 + 2i\eta_{2w}$, що наближено відповідає (3).

Відносні похибки активної і реактивної складових виразів (6) і (7) дорівнюють $\delta_{\text{Re}} \approx \varphi^2 - Z^{\mp 2}\varphi^2 \approx \varphi^2$ і $\delta_{\text{Im}} = -Z^{\mp 2}\varphi^2$. Як бачимо, $\delta_{\text{Re}} > |\delta_{\text{Im}}|$. Похибці $\delta_{\text{Re}} \lesssim 30\%$ відповідає $ka \lesssim \pi / 6$ і критерій δ -наближення:

$$a \lesssim \lambda / 12. \quad (11)$$

Критерії (9) і (11) обмежують відповідно діапазон енергії і частоти при моделюванні скінченних неоднорідностей δ -неоднорідностями.

Похибки дельта-наближення вхідного імпедансу скінченних неоднорідностей

Пересвідчимося у виконанні умов критеріїв (9 — 11) без наближень.

На рис. 3 приведено залежності, які характеризують похибку δ -наближення (з урахуванням знака відхилення) складових вхідного імпедансу неоднорідностей в середовищі 1. Як і очікувалося, активна складова практично не залежить від енергії і для ями змінюється від 1,074 до 1,065, а для бар'єра — від 0,932 до 0,938. Відповідно, практично не змінюється відносна похибка активної складової δ_{Re} . Відносна похибка реактивної складової δ_{Im} суттєво збільшується зі збільшенням енергії. При похибці $|\delta_{Im}| = 30\%$ для ями і бар'єра маємо значення $\lambda' = 1,0$ нм і $\lambda' = 1,1$ нм або співвідношення $a = \lambda' / 10$ і $a = \lambda' / 11$, що відповідає (9).

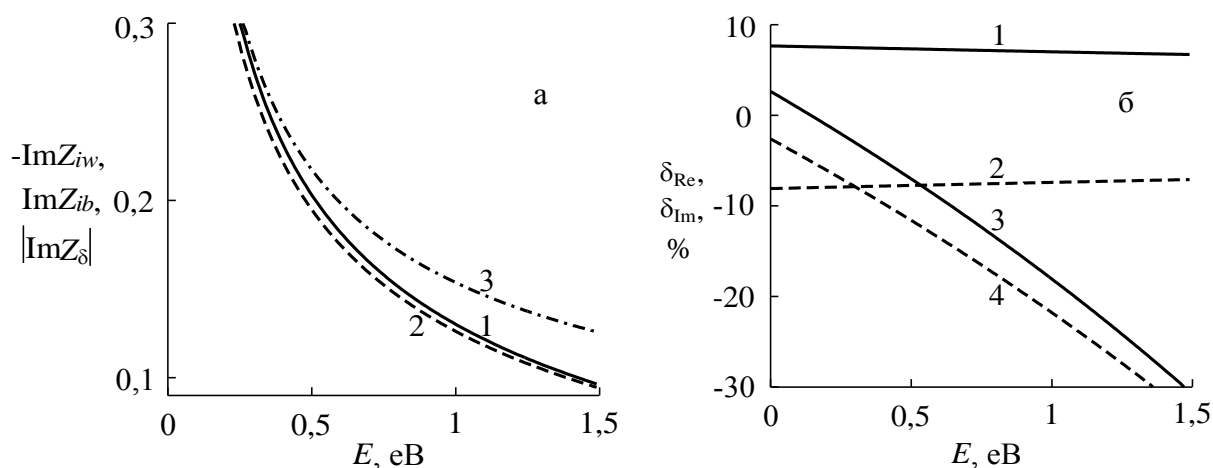


Рис. 3. Залежності реактивної складової вхідного імпедансу (а) скінченних ями (1), бар'єра (2) і δ_1 -неоднорідності (3) та відносної похибки δ -наближення (б) активної (1, 2) і реактивної (3, 4) складової вхідного імпедансу ями (1, 3) і бар'єра (2, 4). $\alpha = 0,03$ eV·нм, $a = 0,1$ нм, $V = 0,3$ eV, $m = m' = m_0$.

Залежності на рис. 4 характеризують похибку δ -наближення складових вхідного імпедансу неоднорідностей в середовищі 2. Оскільки $\alpha_b = Z_b a$, а $\alpha_w = Z_w^{-1} a$, то $-\text{Im}Z_\delta = Z_b \varphi$ і $-\text{Im}G_\delta = Z_w^{-1} \varphi$ — залежності лінійні. На відміну від неоднорідностей у середовищі 1, активна складова суттєво залежить від фазової довжини неоднорідності і визначає максимальну похибку. Похибці $\delta_{Re} = 30\%$ при $Z = 3$ відповідає $a = \lambda / 10$, а при $Z = 5$ — $a = \lambda / 11$, що узгоджується з (11).

Таким чином, при виконанні критеріїв (9) — (11) максимальна (по модулю) похибка δ -наближення складових вхідного імпедансу скінченних неоднорідностей знаходиться в межах приблизно 30%.

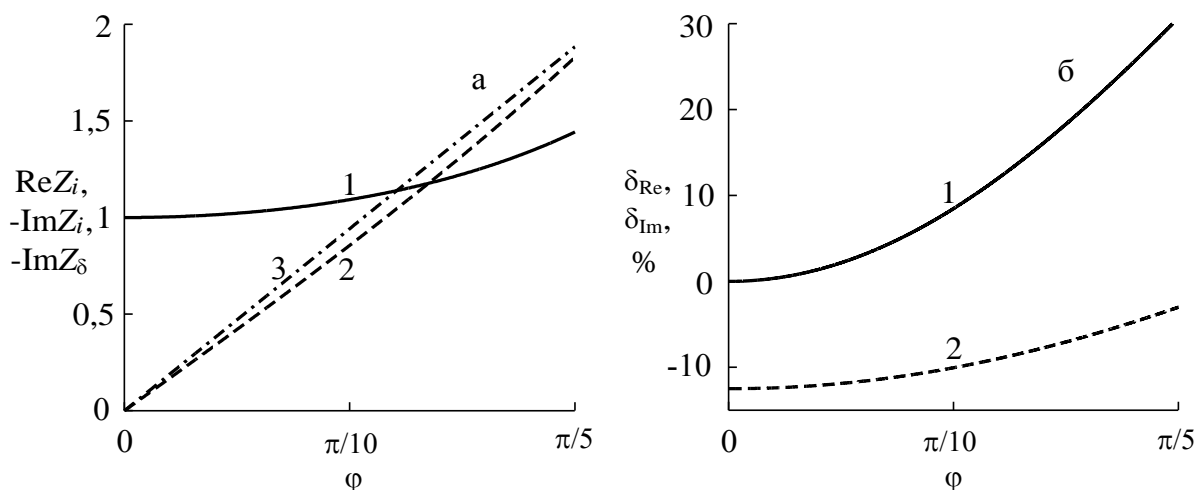


Рис. 4. Залежності складових вхідного імпедансу (а): активної (1), реактивної (2) скінченної неоднорідності і реактивної (3) δ_2 -неоднорідності та відносної похибки δ -наближення (б) активної (1) і реактивної (2) складових. $Z=3$ або $Z=1/3$.

Похибки дельта-наближення коефіцієнта відбиття скінченних неоднорідностей

На рис. 5 приведено залежності коефіцієнта відбиття (по модулю) скінченних ями, бар'єра та δ -неоднорідності в середовищі 1 і відносної похибки δ -наближення. Як бачимо, похибка δ -наближення коефіцієнта відбиття набагато менша у порівнянні з похибками δ -наближення складових вхідного імпедансу. Ця похибка, за винятком малої ділянки на початку залежності 2, збільшується зі збільшенням енергії і при $E=1,5$ еВ для ями і бар'єра складає відповідно -8 і -5% .

Залежності на рис. 6 характеризують δ -наближення коефіцієнта відбиття скінченної неоднорідності в середовищі 2. Як і для неоднорідностей в

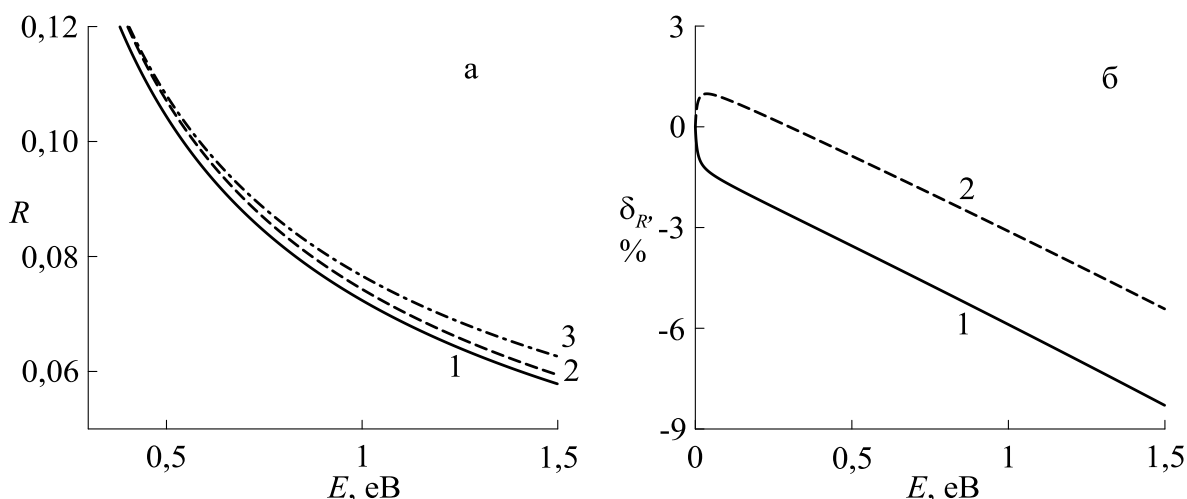


Рис. 5. Залежності коефіцієнта відбиття (а) скінченних ями (1), бар'єра (2), δ -неоднорідності (3) та відносної похибки δ -наближення (б) скінченних ями (1) і бар'єра (2). Параметри відповідають рис. 3.

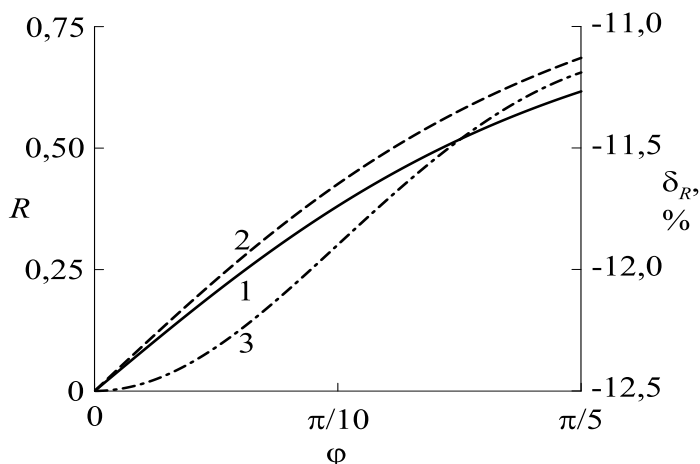


Рис. 6. Залежності коефіцієнта відбиття скінченної неоднорідності (1), δ -неоднорідності (2) та відносної похибки δ -наближення (3).

Параметри відповідають рис. 4.

Таким чином, при виконанні критеріїв (9) — (11) максимальна (по модулю) похибка δ -наближення коефіцієнта відбиття знаходиться в межах приблизно 15%.

Висновки

Критерії наближення скінченних імпедансних неоднорідностей δ -неоднорідностями обмежують ширину неоднорідності однією дванадцятю довжини хвилі, а нормований хвильовий імпеданс електромагнітних та акустичних неоднорідностей значеннями не більше 0,5 або не менше 2. За такими критеріями максимальна (по модулю) похибка δ -наближення складових вхідного імпедансу скінченних неоднорідностей знаходиться в межах приблизно 30%, а коефіцієнта відбиття — 15%.

Перелік посилань

1. Cameron P. Historical perspective on the impedance approach to quantum field theory / P. Cameron. – 2014. – Режим доступу: <http://vixra.org/pdf/1408.0109v4.pdf>
2. Нелин Е. А. Импедансная модель для “барьерных” задач квантовой механики / Е. А. Нелин // УФН. – 2007. – Т. 177, №3. – С. 307-313.
3. Cameron P. Impedance Quantization in Gauge Theory Gravity / P. Cameron. – 2015. – <http://vixra.org/pdf/1503.0262v1.pdf>
4. Markos P. Wave Propagation From Electrons to Photonic Crystals and Left-Handed Materials / P. Markos, C. M. Soukoulis. – Princeton and Oxford: Princeton University Press. – 2008. – 352 p.
5. Нелин Е. А. Импедансные характеристики кристаллоподобных структур / Е. А. Нелин // ЖТФ. – 2009. – Т. 79, № 7. – С. 27-31.
6. Водолазская М. В. Модель импедансных дельта-неоднородностей для микро- и наноструктур / М. В. Водолазская, Е. А. Нелин // Известия вузов. Радиоэлектроника. – 2014. – Т. 57, № 5. – С. 25-34.

References

1. Cameron P. (2014.) Historical perspective on the impedance approach to quantum field theory, Available at: <http://vixra.org/pdf/1408.0109v4.pdf>

2. Nelin E.A. (2007) Impedance model for quantum-mechanical barrier problems. *Phys. Usp.*, vol. 50, no. 3, pp. 293-299
3. Cameron P. (2015) Impedance Quantization in Gauge Theory Gravity, Available at : <http://vixra.org/pdf/1503.0262v1.pdf>
4. Markos P. and Soukoulis C. M. (2008) *Wave Propagation From Electrons to Photonic Crystals and Left-Handed Materials*. Princeton and Oxford: Princeton University Press, 352p.
5. Nelin E. A. (2009) Impedance Characteristics of Crystal-like Structures. *Tech. Phys.*, vol. 54, no. 7, pp. 953-957.
6. Vodolazka, M. and Nelin, E. Model of impedance delta-inhomogeneities for micro- and nanostructures. *Radioelectronics and Communications Systems*, 2014, vol. 57, no 5. pp. 208-216.

Нелін Є. А., Ляшок А. В. Критерії наближення імпедансних неоднорідностей дельта-неоднорідностями. Розглянуто особливості вхідного імпедансу імпедансних δ -неоднорідностей в квантово-механічному, електромагнітному та акустичному середовищах. На основі аналізу вхідних характеристик імпедансних неоднорідностей скінченних розмірів і δ -неоднорідностей встановлено критерії наближення неоднорідностей скінченних розмірів δ -неоднорідностями. Похибка наближення складових вхідного імпедансу скінченних неоднорідностей знаходиться в межах приблизно 30%, а коефіцієнта відбиття — 15%.

Ключові слова: імпедансна неоднорідність, імпедансна дельта-неоднорідність.

Nelin E. A., Liashok A. V. Критерии приближения импедансных неоднородностей дельта-неоднородностями. Рассмотрены особенности входного импеданса импедансных δ -неоднородностей в квантово-механической, электромагнитной и акустической средах. На основе анализа входных характеристик импедансных неоднородностей конечных размеров и δ -неоднородностей установлены критерии приближения неоднородностей конечных размеров δ -неоднородностям. Погрешность приближения составляющих входного импеданса неоднородностей конечных размеров находится в пределах приблизительно 30%, а коэффициента отражения — 15%.

Ключевые слова: импедансная неоднородность, импедансная дельта-неоднородность.

Nelin E. A., Liashok A. V. Criteria of impedance inhomogeneities approaching by delta-inhomogeneities.

Introduction. Impedance δ -inhomogeneities are used for modeling of micro- and nanostructures. In this paper the criteria of impedance inhomogeneities approaching by δ -inhomogeneities are established.

Input impedance of δ -inhomogeneities. Expressions for the δ -inhomogeneities input impedance in quantum-mechanical, electromagnetic and acoustic media are given. Delta-inhomogeneities peculiarly transformed medium impedance, introducing a reactive component. The level of values and character of dependencies of the reactive components of the δ -inhomogeneities input impedance are illustrated.

Criteria of delta-approaching for finite inhomogeneities. As a result of approximation error analysis for the input impedance expressions of finite size inhomogeneities (finite inhomogeneities) by input impedance expressions of δ -inhomogeneities criteria of δ -inhomogeneities approaching (δ -approaching) for finite inhomogeneities are obtained. According to these criteria inhomogeneity width should not exceed one-twelfth of the wavelength and normalized wave impedance values of electromagnetic and acoustic inhomogeneities.

ities should not exceed 0.5 or should be at least 2.

Errors of delta-approaching for finite inhomogeneities input impedance characteristics. The analysis of the approximation errors of the finite inhomogeneities input impedance components characteristics by corresponding input impedance components characteristics of δ -inhomogeneities is fulfilled. Within the δ -approaching criteria the maximum (in magnitude) approximation error of finite inhomogeneities input impedance components is within about 30%.

Errors of delta-approaching for finite inhomogeneities reflection coefficient characteristics. The analysis of the approximation errors of the finite inhomogeneities reflection coefficient characteristics by reflection coefficient characteristics of δ -inhomogeneities is fulfilled. Within the δ -approaching criteria the maximum (in magnitude) approximation error of finite inhomogeneities reflection coefficient is within about 15%.

Conclusions. Criteria of finite inhomogeneities approaching by δ -inhomogeneities limit the inhomogeneity width by one-twelfth of the wavelength and normalized wave impedance values of electromagnetic and acoustic inhomogeneities should not exceed 0.5 or should be at least 2. By this criteria the maximum (in magnitude) error of δ -approaching of finite inhomogeneities input impedance components is within about 30%, and the reflection coefficient — 15%.

Keywords: *impedance inhomogeneity, impedance delta-inhomogeneity.*