УДК 336.77.037

Євграфов Д.В.

канд. техн. наук, с.н.с.
Національний технічний університет України «КПІ»

РОЗПОДІЛЕННЯ АБСОЛЮТНОГО МАКСИМУМУ В МЕТОДИЦІ ОБҐРУНТУВАННЯ ЦІНИ АМЕРИКАНСЬКОГО ОПЦІОНУ

DISTRIBUTING OF ABSOLUTE MAXIMUM IS IN THE METHOD OF GROUND AMERICANS OPTION COST

Знайдено частковий аналог формули Блека–Шоулса для американських опціонів колл (пут) з нульовою внутрішньою вартістю. Показано, що безарбітражна ціна опціону, на акції за якими не сплачуються дивіденди, є дисконтованим математичним сподіванням розподілення абсолютного максимуму (мінімуму) ціни акції. Зроблено порівняльний аналіз результатів з тими, що отримали Блек і Шоулс для європейських опціонів при однакових цінах купівлі акції і виконання опціону.

Найден частичный аналог формулы Блэка–Шоулза для американских опционов колл (пут) с нулевой внутренней стоимостью. Показано, что безарбитражная цена опциона на акции по которым не выплачиваются дивиденды, является дисконтированным математическим ожиданием распределения абсолютного максимума (минимума) цены акции. Сделан сравнительный анализ результатов с теми, которые получили Блэк и Шоулз для европейских опционов при одинаковых ценах покупки акции и исполнения опциона.

The partial analogue of formula of Black-Scholes is found for American call options (put option) with a zero intrinsic value. It is show that fair price, on an action which dividends are not paid on, are the discounted expected values of distributing of absolute a maximum (minimum) of actions cost. The comparative analysis of results is done with those which got Black and Scholes for European options at the identical costs spot action and exercise price of option.

Ключові слова: американський опціон, безарбітражна ціна, акція, ціна виконання, математичне сподівання, марковський процес.

Вступ. Відшукування розумної ціни американського опціону, яке істотно зменшить кількість арбітражних операцій, до нині залишається актуальним завданням. Після отримання Блеком і Шоулсом виразу для премії європейських опціонів [1] аналіз ціни для американського опціону носить порівняльний характер [2]. Це ускладнює точність розрахунків справжньої ціни опціону, яка невиправдано завищується з боку продавця і занижується з боку покупця та неминуче призводить до підвищення кількості арбітражних операцій.

Дивує невирішеність цього завдання, оскільки достатнє теоретичне обґрунтування його розв'язання знайдено у фундаментальних працях з використанням апарату марковських процесів. Однією з таких праць є, наприклад, робота [3].

Теоретичні дослідження марковських процесів, які належать радянській математичній школі, мають світове загальнотеоретичне значення. Ще в 30-х роках минулого століття Колмогоровим було запропоновано зворотне рівняння для умовної густини ймовірності процесу $S = S(t)$ [3, с. 116]:

$$\frac{\partial W'(S_T, T/S, t)}{\partial t} + K_1(S,t)\frac{\partial W'(S_T, T/S, t)}{\partial S} + \frac{1}{2}K_2(S,t)\frac{\partial^2 W'(S_T, T/S, t)}{\partial S^2} = 0, \tag{1}$$

K_1, K_2 – коефіцієнти зносу і дифузії; $S_T = S(T)$, T – кінцевий час, яким можна описати у тому числі і ціноутворення опціонів. Наприклад, відоме диференціальне рівняння Блека–Шоулса для недисконтованої ціни (премії) європейського опціону колл, яке має вигляд:

$$\frac{\partial G(S,t)}{\partial t} + rS\frac{\partial G(S,t)}{\partial S} + \frac{\sigma^2}{2}S^2\frac{\partial^2 G(S,t)}{\partial S^2} - rG(S,t) = 0, \tag{2}$$

де $G(S,t) = \int_K^\infty (S_T - K)W(S_T, T/S, t)dS_T$; r – ставка без ризику; σ – миттєве стандартне відхилення доходності акції; K – ціна реалізації опціону; S_T – ціна акції на при кінці дії опціону, для $W'(S_T, T/S, t) = \partial W(S_T, T/S, t)/\partial S$ є частковим випадком зворотного рівняння Колмогорова (1) при

$$K_1(S,t) = (r + \sigma^2)S, K_2(S,t) = \sigma^2 S^2, \tag{3}$$

$S = S_0$ – початкова ціна акції, $t = 0$. Такий самий результат для $W(S_T, T/S, t)$ буде отримано внаслідок розв'язання рівняння Фоккера–Планка–Колмогорова з коефіцієнтами (3) [3, с. 116]:

$$\frac{\partial W(S_T, T/S, t)}{\partial T} + \frac{\partial}{\partial S_T}\left[(r + \sigma^2)S_T \cdot W(S_T, T/S, t)\right] - \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial S_T^2}\left[\sigma^2 S_T^2 \cdot W(S_T, T/S, t)\right] = 0. \tag{4}$$

Як бачимо, результати Блека і Шоулса не є оригінальними, незважаючи на світове визнання їхньої роботи в економічній математиці. Але головною заслугою цих вчених є доказ мартінгальності для послідовностей, пов'язаних з ціною базового активу і фактичне доведення головного висновку: ціна акції є марковським процесом.

Постановка завдання. Метою дослідження є адаптація теорії марковських процесів для визначення ціни американського опціону. Передбачається отримання нових результатів у фінансовій математиці, які побудовані на дослідженнях, відомих у фізиці і радіотехніці.

Методологія. Для обґрунтування премії американського опціону досліджуються імовірнісні характеристики максимального і мінімального значення марковського процесу ціни акції $S(t)$ протягом дії опціону $t \in [0,T]$. Для цього аналогічно методу відбиття зі зміною знаку, що використовується у фізиці і радіотехніці [4, с. 239; 5], розроблений метод рішення диференційного рівняння (4) з певними граничними умовами.

Результати досліджень. Задача полягає в тому, щоб добре досліджений апарат марковських процесів залучити для обґрунтування премії американського опціону колл – s і пут – p, які пов'язані з дисконтованими за тривалістю дії опціону T математичними сподіваннями E:

$$s = s^* \exp[-rT], \; s^* = \begin{cases} E(S-K), S > K, \\ 0, \qquad S \le K, \end{cases} \; p = p^* \exp[-rT], \; p^* = \begin{cases} E(K-S), S < K, \\ 0, \qquad S \ge K. \end{cases} \tag{5}$$

У нашому випадку доводиться стикатися не з ціною акції наприкінці опціону S_T, як це відомо для аналогічних (5) цін європейського опціону, а з поточною ціною акції S, яка змінюється в часі і має певні статистичні характеристики в межах цінового коридору.

Розглянемо ціну акції у часовому інтервалі дії опціону. Відомо, що роз'язання рівняння (1) без граничних умов можна знайти густину імовірності $W(S_T, T / S, t)$ для будь-якого поточного часу $t \in [0,T]$. Вона відповідає логонормальному закону розподілення:

$$W(S_T, T / S, t) = \frac{1}{S_T \sqrt{2\pi\sigma^2 (T-t)}} \exp\left[-\frac{\left(\ln S_T - \ln S - (T-t)(r - \sigma^2/2)\right)^2}{2\sigma^2 (T-t)} \right]. \tag{6}$$

Рішення (6) є ймовірнісною ретроспективою ціни акції $S_T(T)$ на момент часу t. Будемо у подальшому вважати у (6) $S = S_0$, а $t = 0$. Тоді ймовірність того, що за час T процес $S(t)$ не перевищить деякий поріг h встановлює ймовірнісні характеристики недисконтованої премії американського опціону колл (див. рис. 1 а):

$$P[\lambda_s \le h - K] = P\left[\sup_{t \in [0,T]} S(t) \le h \right], h \ge K, \tag{7}$$

а подібна ймовірність для процесу, який не буде нижчим за h– ймовірнісні характеристики недисконтованої премії американського опціону пут (див. рис. 1, б):

$$P[\lambda_i \le K - h] = P\left[\inf_{t \in [0,T]} S(t) \ge h \right], h \le K. \tag{8}$$

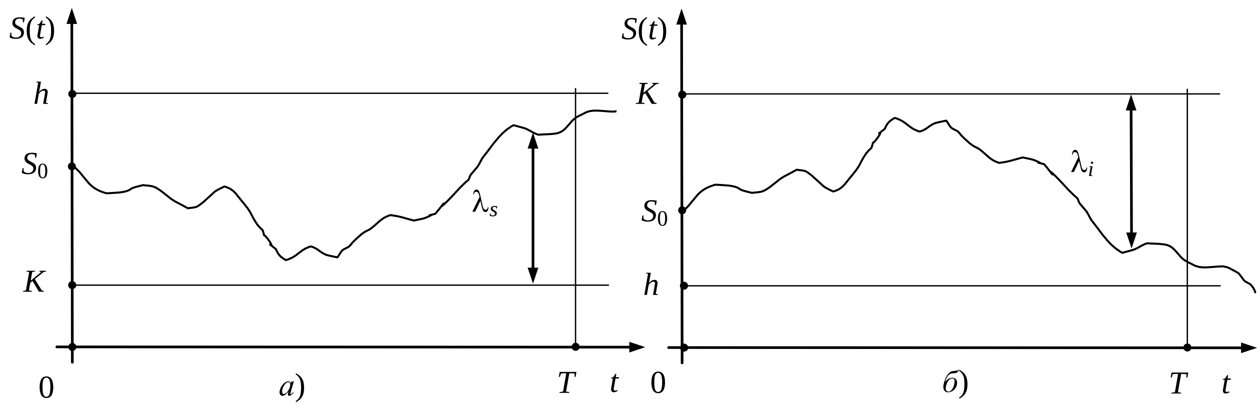

Рис. 1. До визначення ймовірнісних характеристик премії:
а) американського опціону колл; *б*) американського опціону пут

Із (7) та (8) слідують розподілення недисконтованих премій опціонів колл і пут:

$$P[\lambda_s \le x] = P\left[\sup_{t\in[0,T]} S(t) \le x + K\right] = P_s[x+K],\ x>0,$$
$$P[\lambda_i \le x] = P\left[\inf_{t\in[0,T]} S(t) \ge K - x\right] = P_i[K-x],\ 0<x\le K, \qquad (9)$$

для яких розподілення абсолютного максимуму та мінімуму дорівнюють [4, с. 312]:

$$P_s[h] = \int_0^h w(S,T/S_0)\,dS,\ S_0<h,\ \ P_i[h] = \int_h^\infty w(S,T/S_0)\,dS,\ S_0>h, \qquad (10)$$

де $w(S,T/S_0)$ – розв'язання рівняння (4) з граничною і початковою умовами [3, с. 124]:

$$w(S=h,T/S_0)=0,\ \ w(S,0/S_0)=\delta(S-S_0). \qquad (11)$$

У працях [3–5] показано, як виконати умови (11) методом відбиття зі зміною знаку. Цей метод застосовується, коли співвідношення $w(h,T/h-S_0)/w(h,T/h+S_0)$ не залежатиме від T. Але в нашому випадку отримати розв'язок простіше, оскільки будь яка функція

$$w(S,T/S_0) - \frac{w(h,T/S_0)}{w(h,T/f(S_0))}\cdot w(S,T/f(S_0)), \qquad (12)$$

для якої співвідношення $w(h,T/S_0)/w(h,T/f(S_0))$ не залежить від T, відповідає вимогам (11) і є розв'язанням рівняння (4); $f(S_0)$ – деяка довільна функція, що диференціюється.

Підстановка (6) до (12) дає можливість знайти невідому функцію $f(S_0)$. Для цього достатньо, щоб виконувалося рівняння

$$\left(\ln h-\ln f(S_0)\right)^2-\left(\ln h-\ln S_0\right)^2=0,$$

яке легко зводиться до квадратного:

$$x^2-2\ln h\cdot x+2\ln h\cdot\ln S_0-\left(\ln S_0\right)^2=0,$$

де $x=\ln f(S_0)$, з дискримінантом $2\left(\ln h-\ln S_0\right)$ і рішеннями: $x_1=\ln S_0$ і $x_2=2\ln h-\ln S_0$. Перший розв'язок є тривіальним, тому $f(S_0)=h^2/S_0$. Підстановка останнього до (12), з урахуванням (6), дає можливість отримати необхідний для (10) вираз:

$$\begin{aligned}w(S,T/S_0)&=\frac{1}{S\sqrt{2\pi\sigma^2T}}\exp\left(-\frac{\left(\ln S-\ln S_0-T\left(r-\sigma^2/2\right)\right)^2}{2\sigma^2T}\right)-\\&-\frac{1}{S\sqrt{2\pi\sigma^2T}}\exp\left(\frac{2\left(\ln h-\ln S_0\right)\cdot\left(r-\sigma^2/2\right)}{\sigma^2}-\frac{\left(\ln SS_0-\ln h^2-T\left(r-\sigma^2/2\right)\right)^2}{2\sigma^2T}\right).\end{aligned} \tag{13}$$

Інтегрування в (10) дозволяє отримати розподілення абсолютного максимуму і мінімуму:

$$\begin{aligned}P_s(h)&=F\left(\frac{\ln h-\ln S_0-T\left(r-\sigma^2/2\right)}{\sigma\sqrt{T}}\right)-\exp\left(\frac{2\left(\ln h-\ln S_0\right)\cdot\left(r-\sigma^2/2\right)}{\sigma^2}\right)F\left(-\frac{\ln h-\ln S_0+T\left(r-\sigma^2/2\right)}{\sigma\sqrt{T}}\right),S_0<h,\\P_i(h)&=F\left(-\frac{\ln h-\ln S_0-T\left(r-\sigma^2/2\right)}{\sigma\sqrt{T}}\right)-\exp\left(\frac{2\left(\ln h-\ln S_0\right)\cdot\left(r-\sigma^2/2\right)}{\sigma^2}\right)F\left(\frac{\ln h-\ln S_0+T\left(r-\sigma^2/2\right)}{\sigma\sqrt{T}}\right),S_0>h,\end{aligned} \tag{14}$$

$F(x)$ – інтеграл ймовірності нормованої гаусовської величини, а задача обґрунтування премій зводиться до відшукування математичних сподівань розподілень (9), до яких входять (14):

$$\begin{aligned}s^*&=-\int_0^\infty xd\left[1-P_s\left(x+K\right)\right]=\int_0^\infty 1-P_s\left(x+K\right)dx,\\p^*&=\int_0^K xdP_i\left(K-x\right)=K-\int_0^K P_i\left(K-x\right)dx.\end{aligned} \tag{15}$$

Вираз (15) для недисконтованої премії опціонів колл і пут можна отримати, на жаль, лише коли $S_0=K$. В іншому випадку під час інтегрування у (15) не виконуються вимоги виразу (14), за якими $S_0<h$ – для $P_s(h)$ і $S_0>h$ – для $P_i(h)$.

З урахуванням цього і (5), остаточний вираз для ціни американського опціону колл з нульовою внутрішньою вартістю має вигляд:

$$s=K\left[\int_0^\infty\exp\left(x\right)F\left(\frac{-x+T\left(r-\sigma^2/2\right)}{\sigma\sqrt{T}}\right)+\exp\left(\frac{2xr}{\sigma^2}\right)F\left(\frac{-x-T\left(r-\sigma^2/2\right)}{\sigma\sqrt{T}}\right)dx\right]\exp\left(-rT\right), \tag{16}$$

а для ціни американського опціону пут з нульовою внутрішньою вартістю –

$$p = K\left[1-\int_0^{\infty}\exp(-x)F\left(\frac{x+T(r-\sigma^2/2)}{\sigma\sqrt{T}}\right)-\exp\left(-\frac{2xr}{\sigma^2}\right)F\left(\frac{-x+T(r-\sigma^2/2)}{\sigma\sqrt{T}}\right)dx\right]\exp(-rT). \qquad (17)$$

Незважаючи на те, що вирази (16) і (17) дають смогу розраховувати премії американських опціонів лише з нульовою внутрішньою вартістю ($S_0 = K$), отримані результати мають практичну цінність. Розрахунки можна використовувати, коли спостерігається перепродаж або перекупівля акцій. При цьому ціна акції певний час коливається на мінімальному або максимальному рівні і ще не має певного зворотного тренду. Саме у такий час для привабливості контракту внутрішню вартість опціону роблять нульовою, вкладаючи ціну лише у часовий (зовнішній) потенціал опціону.

На рис. 2 подано залежності премій для американського опціону колл (суцільна лінія), розраховану за виразом (16), при $r = 0{,}1; \sigma = 1; K = 10$, і європейського опціону колл (пунктирна лінія), розраховану для тих самих r, σ, K, відповідно до формули Блека – Шоулса, при $S_0 = K$:

$$s = K\left[F\left(\frac{T(r+\sigma^2/2)}{\sigma\sqrt{T}}\right)-\exp(-rT)F\left(\frac{T(r-\sigma^2/2)}{\sigma\sqrt{T}}\right)\right].$$

Як бачимо, цінність опціонів колл залежно від тривалості дії контрактів зростає, причому американського опціону постійно, а європейського – лише до K.

На рис. 3 суцільною лінією подано залежність премії американського опціону пут, розраховану за виразом (17) при $r = 0{,}1; \sigma = 1; K = 10$, від тривалості дії контракту. Для порівняння пунктирною лінією подано аналогічну залежність для премії європейського опціону пут, розраховану для тих самих r, σ, K при $S_0 = K$ відповідно до рішення рівняння (2), в якому $p^* = G(S,t)\big|_{S=K,t=0}; G(S,t) = \int_0^K (K - S_T)W(S_T, T/S,t)dS_T$:

$$p = K\left[F\left(-\frac{T(r+\sigma^2/2)}{\sigma\sqrt{T}}\right)-\exp(-rT)F\left(-\frac{T(r-\sigma^2/2)}{\sigma\sqrt{T}}\right)\right].$$

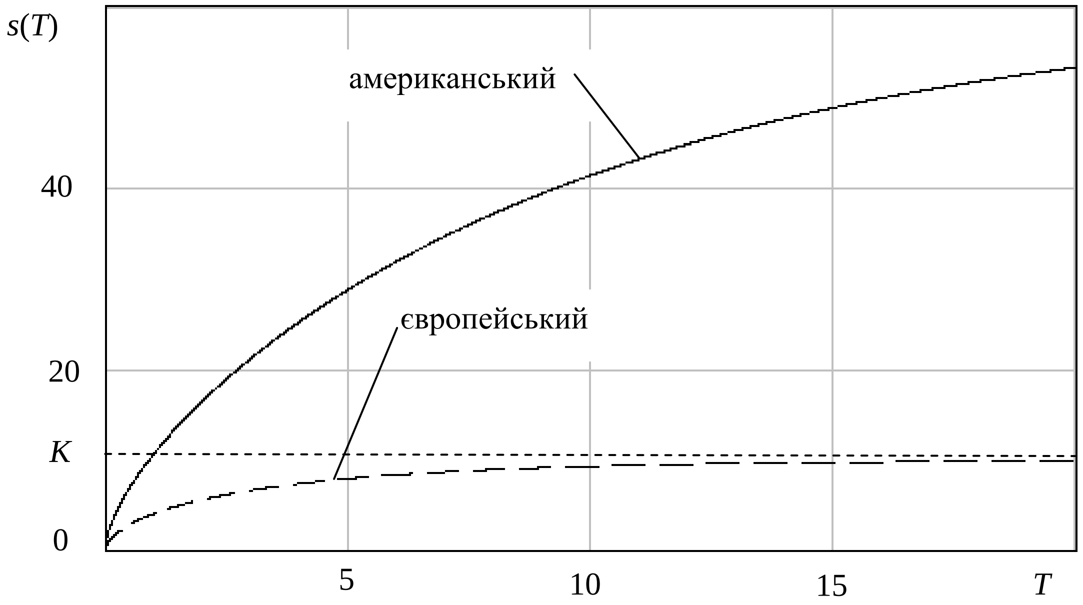

Рис. 2. Залежність ціни опціону колл від тривалості дії контракту

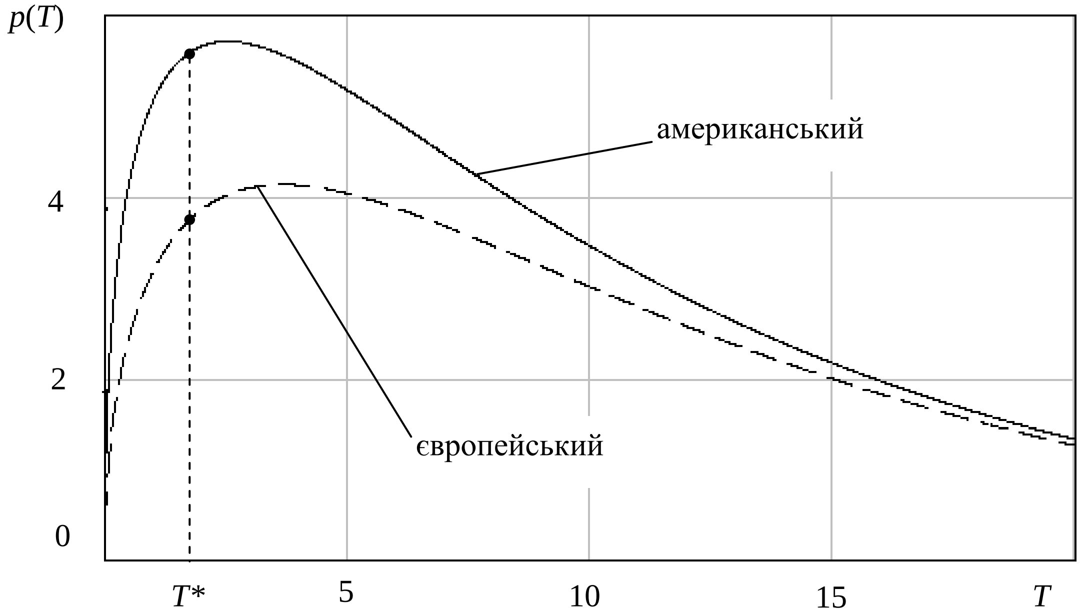

Рис. 3. Залежність ціни опціону пут від тривалості дії контракту

Як бачимо, цінність опціонів пут залежно від тривалості дії контрактів спочатку зростає, досягає максимумів, а потім повільно згасає. Це зрозуміло, оскільки зовнішній потенціал опціону побудований на сподіванні його покупця отримати прибуток через деякий час, триває певний час. Згодом такі сподівання згасають через хибність тривалих прогнозів щодо падіння ціни акції, оскільки остання має тенденцію зростання завдяки ненульовій ставкці r.

Висновки. Наукова новизна отриманих результатів полягає в отриманні ціни американських опціонів за допомогою апарату марковських процесів. Порівняння премій американського і європейського опціонів ще раз доводить більшу цінність американських опціонів над європейськими для контрактів будь якої тривалості.

Аналіз ціни американського опціону колл (рис. 2) доводить його постійно зростаючу цінність, при якій дострокове виконання невигідне покупцю: краще продати опціон за ціною завжди набагато більшої зовнішньої вартості. Це підтверджує висновки роботи [2, с. 239].

Можливість дострокового виконання американського опціону пут дає більший виграш для $T = T^*$ (рис. 3). У подальших дослідженнях буде корисним знаходження тривалості контракту – T^*, яка забезпечує максимальну прибутковість американського опціону пут над подібним європейським.

Література

1. The pricing of options and corporate liabilities / F. Black, M. Scholes// J. Political Economy. – 1973. – Vol. 81. – P. 637–657.

2. Буренин А.Н. Форварды, фьючерсы, опционы, экзотические и погодные производние / А.Н. Буренин. – М.: Научно-техническое общество им. Вавилова, 2005. – 534 с.

3. Тихонов В.И. Марковские процессы / В.И Тихонов, М.А. Миронов. – М.: Сов. радио, 1977. – 488 с.

4. Тихонов А.Н. Уравнения математической физики: [учебн. пособие для ун-тов] / Тихонов А.Н., Самарский А.А. – [Изд. 4-е, испр.] – М.: Наука. – 1972 г. – 735 с.

5. Евграфов Д.В. Метод отражения с переменой знака в задачах анализа качества обнаружения сигналов / Д.В. Евграфов // Радиоэлектроника. – 2010.– № 6.– С. 58–64. (Изв. высш. учеб. заведений).