2.2 Спектральний аналіз

2.2.1 Ряд Фур'є

Будь-яку періодичну функцію, що відповідає умовам Діріхле, можна представити сумою гармонійних функцій або комплексних експонент. Такий розклад отримав назву розклад в ряд Фур'є.

Умови Діріхле: функція не повинна мати розривів другого роду, а кількість розривів першого роду та екстремумів повинна бути кінцевою.

Тригонометрична форма раду Фур'є представляється формулою:

$$s(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cdot \cos(n \cdot \Omega \cdot t + b_n \cdot \sin(n \cdot \Omega \cdot t))$$

де $\Omega = 2\pi / T$ — основна частота коливань;

T — період коливань;

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} s(t) \cos(n \cdot \Omega \cdot t) dt, \quad n = 0,1,2,...;$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} s(t) \sin(n \cdot \Omega \cdot t) dt, \quad n = 1,2,3,...$$

Також ряд Фур'є можна представити у вигляді:

$$s(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cdot \cos(n \cdot \Omega \cdot t - \theta_n))$$

де $A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$ — амплітуди гармонійних складових;

n — номер гармоніки;

$\theta_n = arctg \dfrac{b_n}{a_n}$ — початкові фази гармонійних складових.

Гармоніки на частотах $n \cdot \Omega$ $(n = 1,2,3,...)$ утворюють амплітудну спектральну характеристику (амплітудний спектр), а початкові фази — фазову спектральну характеристику (фазовий спектр).

Не важко помітити, що для періодичної функції отримаємо дискретний спектр.

Для запису ряду Фур'є використовують і комплексну форму запису:

$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \dot{C}_n \cdot e^{jn\Omega t}$$

де $\dot{C}_n = \dfrac{1}{T}\int\limits_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} s(t)\cdot e^{-jn\Omega t}dt$ — коефіцієнти раду Фур'є.

2.2.2 Перетворення Фур'є

Перетворення Фур'є (*Fourier transaform*) — інструмент спектрального аналізу неперіодичних сигналів. Основні відмінності перетворення Фур'є від ряду Фур'є, викликані припущенням, що період неперіодичного сигналу прямує до нескінченності:

- частота з дискретних відліків перетворюється в неперервний параметр перетворення;
- результатом розрахунків замість коефіцієнтів ряду є функція частоти (спектральна функція)

В результаті таких перетворень отримаємо функцію, яка розраховується за формулою:

$$S(j\omega) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} s(t)\cdot e^{-j\omega t}dt \qquad (2.1)$$

Функція $S(j\omega)$ отримала назву спектральна густина сигналу $s(t)$, а формула (2.1) — пряме перетворення Фур'є.

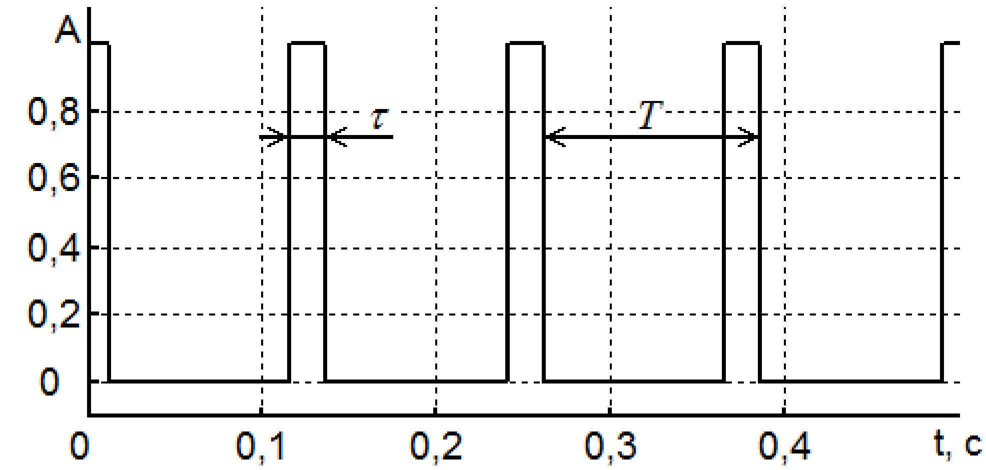
Обернене перетворення Фур'є розраховується за формулою:

$$s(t) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} S(j\omega)\cdot e^{j\omega t}d\omega$$

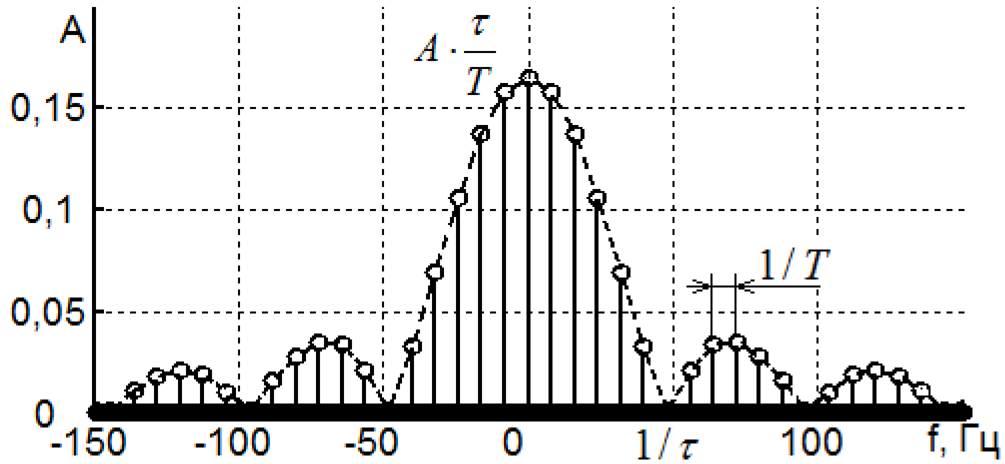
Спектральна густина є комплексною величиною. Модуль спектральної густини $|S(j\omega)|$ називається амплітудним спектром сигналу (в деяких джерелах використовується назва амплітудно-частотна характеристика (АЧХ) сигналу), аргумент спектральної густини називається фазовим спектром (відповідно, в деяких джерелах, називається ФЧХ — фазо-частотною характеристикою сигналу).

2.2.3 Спектри деяких сигналів

На рис. 2.4а наведено послідовність прямокутних імпульсів (τ — тривалість імпульсів, T — їх період, A — амплітуда), а на рис. 2.4б — спектр даної послідовності (дискретні відліки), як видно з рисунку огинаючою даного спектру є функція $\sin(x)/x$ (пунктирна лінія). Відстань між гармоніками спектру рівна $1/T$, тобто частоті послідовності імпульсів, ширина пелюсток спектру обернено пропорційна до тривалості імпульсу $1/\tau$. Якщо період слідування імпульсів прямує до безкінечності (отримуємо одиничний прямокутний імпульс), то відстань між гармоніками прямує до нуля і спектр з дискретного перетворюється на неперервний. Зменшення тривалості імпульсу призводить до розширення основної пелюстки спектру.



а



б

Рисунок 2.4 — Послідовність прямокутних імпульсів (а) та її спектр (б).

Спектр сигналу у вигляді дельта-функції є константою, тобто рівномірний у всьому діапазоні частот. Спектром синусоїдального сигналу з частотою f є дві дельта-функції на частотах $\pm f$.