ВОСТАНОВЛЕНИЕ РАЗРЕЖЕННО ДИСКРЕТИЗИРОВАННЫХ СИГНАЛОВ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ МИНИМИЗАЦИИ ℓ_1-НОРМЫ

Котляров В. В., Шпилька А. А.
Национальный технический университет Украины
«Киевский политехнический институт», г. Киев, Украина

Разреженная дискретизация (англ. Sparse sampling or Compressed Sensig) – это новый метод в обработке сигналов для восстановления сигнала по неравномерным во времени выборкам, путем решения системы недоопределенных уравнений. Основная идея состоит в том, что большинство интересующих сигналов, если их представить в некотором базисе, будут содержать много коэффициентов близких или равных нулю.

Процесс обработки начинается из принятия некоторого числа выборок сигнала в базисе, отличного от базиса, в котором изображение сигнала имеет множество нулевых коэффициентов. Так как число выборок ограниченно, задача преобразования изображения назад в исходную область требует решение недоопределённого матричного уравнения. Это решение представляет собой выбор изображения-оригинала из огромного числа различных изображений-кандидатов, которые могут быть результатом для данной выборки. Таким образом, нужно ввести некоторое дополнительное ограничение, чтобы выбрать «лучшего» кандидата в изображения-оригиналы.

Классическим решением такой проблемы является минимизация нормы ℓ_2 [1]:

$$\|\mathbf{x}\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{N} |x_i|^2},$$

то есть минимизация количества энергии в изображении. Однако такой подход приводит к плохим результатам для большинства практических приложений, так как неизвестные (отсутствующие в выборке) коэффициенты редко имеют нулевую энергию [2]. С другой стороны, поскольку сигнал является разреженным в определенном базисе, то адекватным решением будет являться минимизация нормы ℓ_0, что эквивалентно максимизации числа нулевых коэффициентов в новом базисе. Однако это NP-сложная задача, и практически не решаема.

Согласно [2] принято минимизировать аппроксимирующую ℓ_1-норму:

$$\|\mathbf{x}\| = \sum_{i=1}^{N} |x_i|, \tag{1}$$

или сумму в абсолютных значениях. Задача нахождения минимума ℓ_1-нормы формулируется в виде задачи линейного программирования, для которой существуют эффективные методы решения.

Рассмотрим более подробно случай разреженной дискретизации временного сигнала с множеством нулевых коэффициентов в базисе Фурье. Пусть:

$$\mathbf{S} = \mathbf{\Phi} \cdot \mathbf{x},$$

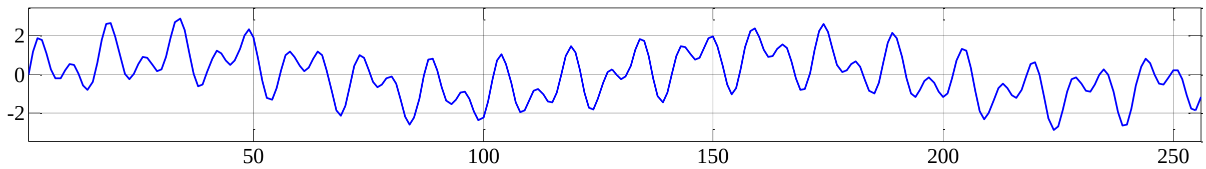
где $\mathbf{x}$ – вектор-столбец полного набора входных выборок размером N; $\mathbf{\Phi}$ – базис преобразования Фурье размером $N \times N$; $\mathbf{S}$ – изображение сигнала $\mathbf{x}$ в базисе Фурье $\mathbf{\Phi}$. Введем в рассмотрение вектор $\mathbf{u}$ размером M, который состоит из некоторого множества выборок сигнала из $\mathbf{x}$, расположенных в координатах $\{k_1, k_2, ..., k_M\}$ и матрицу $\mathbf{\Phi}'$ размером $M \times N$, что состоит из $\{k_1, k_2, ..., k_M\}$ строк матрицы $\mathbf{\Phi}^{-1}$. Тогда можно записать систему уравнений, которая будет содержать M уравнений с N неизвестными и являться недоопределенной:

$$\mathbf{\Phi}' \cdot \mathbf{Z} = \mathbf{u} \qquad (2)$$

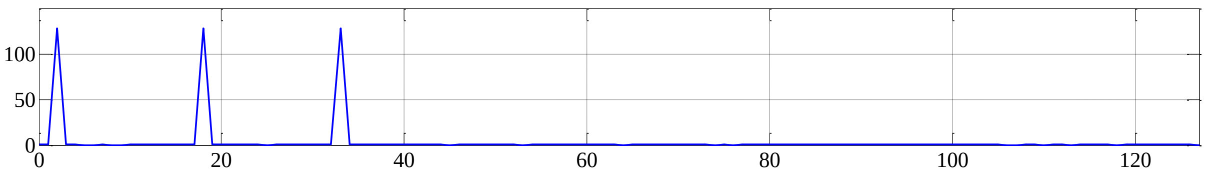
В общем случае такая система имеет бесконечное множество решений относительно $\mathbf{Z}$, но существует лишь одно решение, которое удовлетворяет ограничению (1). Восстановление исходного сигнала происходит путем следующего преобразования:

$$\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{\Phi}^{-1} \cdot \mathbf{Z}.$$

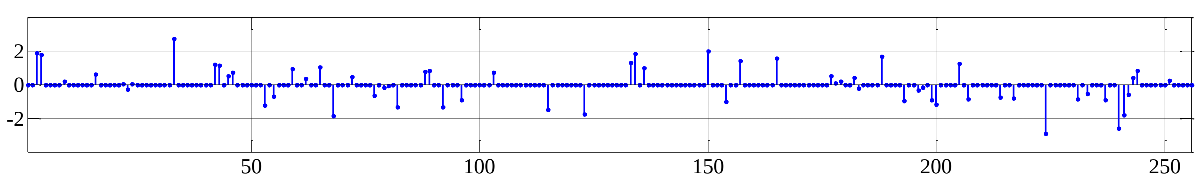
В работе проведено моделирование описанного метода восстановления сигнала для модельного примера. В качестве исходного сигнала рис. 1а выбрано $N = 256$ отсчетов сигнала, спектр которого изображен на рис. 1б. Для восстановления сигнала использовано $M = 64$ значения выборок исходного сигнала, взятых случайным образом, как показано на рис. 1в.



а



б



в

Рисунок 1

В качестве дополнительного ограничения для решения недоопределенной системы (2), взято минимизация нормы (1). Результаты восстановления изображения сигнала, изображены на рис.2а, после перехода в оригинальный базис восстановленный сигнал имеет вид изображенный на рис.2б.

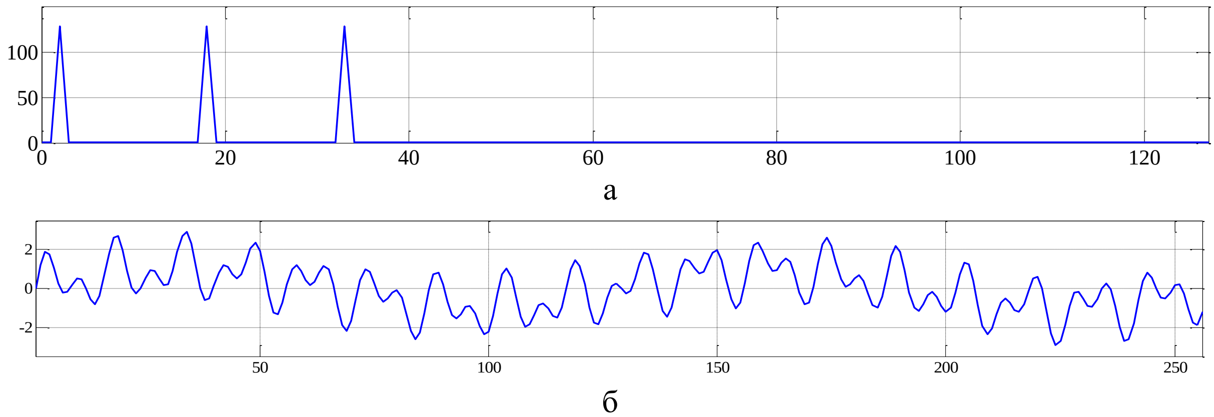


Рисунок 2

Как видно из результатов моделирования, использование описанного метода позволяет произвести восстановление сигнала по неравномерно распределенным выборкам. Среднеквадратическое отклонение восстановленного сигнала от оригинала составляет 10^{-4} единиц.

Перечень источников

1. Yonina C. Eldar. Compressed sensing: Theory and applications/ Yonina C. Eldar, Gitta Kutyniok .- New York .- Cambridge university press, 2012. – 544p.

2. Candès, Emmanuel J. Stable signal recovery from incomplete and inaccurate measurements/ Emmanuel J. Candès, Justin K. Romberg, Terence Tao// Communications on Pure and Applied Mathematics.- 2006 .- 59.- 1207–1223.

Аннотация

В работе описаны принципы восстановления сигнала по его разреженным выборкам на основе минимизации различных норм ℓ_p. Детально рассмотрено восстановление сигнала в базисе преобразования Фурье и проведено моделирования используя минимизацию ℓ_1 нормы.

Ключевые слова: Разреженная дискретизация, восстановление сигнала, ℓ_1 норма.

Анотація

В роботі описані принципи відновлення сигналу по його розрідженим вибіркам на основі мінімізації різноманітних норм ℓ_p. Детально розглянуто відновлення сигналу в базисі Фур'є і проведено моделювання з використанням мінімізації ℓ_1 норми.

Ключові слова: Розріджена дискретизація, відновлення сигналу, ℓ_1 норма.

Abstract

The paper describes the principles of signal recovery in his sparse samples by minimizing the various ℓ_p norms. Considered in detail the signal recovery in the basis of the Fourier transform, and conducted simulations using minimization of the ℓ_1 -norm.

Keywords: Sparse sampling, recovery signal, ℓ_1 norm.